

# אשנב למתמטיקה

פרק 11 - סדרה הנדסית

תוכן העניינים

1. סדרה הנדסית אינסופית מותכנת.

## סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

**סיכום כללי:**

- **הגדרה:**

סדרה הנדסית  $a_n$  המקיימת:  $|q| < 1$ , ( $q \neq 0$ ) נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת  $a_n$  ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל:  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  והציבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

$$\text{מתתקבל הכלל הבא: } S = \frac{a_1}{1-q}$$

- **סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

- כאשר מתבקשים לחשב סכום של  $n$  איברים ראשוניים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה:  $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ .

- כאשר מתבקשים לחשב סכום של  $n$  איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילה באיבר  $a_k$  יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה

$$\text{באופן הבא: } S_n = \frac{a_k(q^n - 1)}{q - 1}$$

**שאלות:**

**1)** מצא את סכום כל איברי הסדרה הנדסית הבאה:  $\dots, 1\frac{1}{3}, 4, 12, \dots$

**2)** סכום כל איברי סדרה הנדסית נוספת שמנתה  $\frac{1}{4}$  הוא 32.  
מצא את האיבר הראשון בסדרה.

**3)** נתונה סדרה הנדסית נוספת יורדת שסכוםה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

**4)** האיבר הראשון בסדרה הנדסית נוספת יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא  $\frac{1}{3}9$ . מצא את סכום האיברים במקומות האיזוגיים.

\***הערה:** שתי הבעיות הבאות מסכימות את סוג הסדרה וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקורב בנושא זה ואין מייצגות אורך של שאלת בגרות.

**5)** נתונה סדרה הנדסית נוספת מתכnestת  $a_n$  מנתה  $q$  שמנתה  $(q \neq 0, |q| < 1)$ , מצא את סכום האיברים  $c_n$  ו-  $d_n$  באופן הבא:  
מגדירים שלוש סדרות חדשות:  $c_n, b_n, d_n$ .

$d_n$	$c_n$	$b_n$	הסדרה:
$d_1 = S_a + a_1$	$c_1 = a_2^2 - a_1^2$	$b_1 = a_1$	
$d_2 = S_a + a_2$	$c_2 = a_3^2 - a_2^2$	$b_2 = a_1 + a_2$	
$d_3 = S_a + a_3$	$c_3 = a_4^2 - a_3^2$	$b_3 = a_1 + a_2 + a_3$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$d_n = S_a + a_n$	$c_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$	$b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_{a(n)}$	<b>הכלל:</b>

הסכום  $S_a$  הוא סכום הסדרה  $a_n$ , והסכום  $S_{a(n)}$  הוא סכום  $n$  האיברים הראשונים של הסדרה  $a_n$ .

- א. קבע ALSO מבין הסדרות  $b_n$ ,  $c_n$  ו-  $d_n$  חן הנדסיות והבע את מנתן ע"י  $q$ .
- ב. הבע באמצעות  $a_1$  בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצויה בסעיף הקודם.
- ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצויה בסעיף א' ב-  $S_{(s)}$ . הוכח כי לא קיים ערך של  $q$  עבורו סכום ריבועי האיברים,  $S_{(s)}$ , שווה לסכום הסדרה הניל בሪבוע.

6) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת:  $a_n$  שמנתה  $q$ .  
 מגדירים סדרה חדשה  $b_n$  באופן הבא:

$$b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q}, b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q}, b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q}, \dots, b_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q} \dots$$

כאשר:  $S_n^*$  מייצג את סכום הסדרה  $a_n$  החל מהאיבר  $a_n$  (עוד אינסוף).

- א. הוכח כי הסדרה  $b_n$  היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכותב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות  $a_1$  ו-  $q$ .
- ב. ידוע כי סכום הסדרה  $b_n$  הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$  גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה  $b_n$ . מצא את  $a_1$  ו-  $q$ .
- ג. הייעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקאים:  $b_2 + b_3 + \dots + b_n = 42$ .
- ד. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה  $b_n$ .
- ה. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה  $b_n$ .
- ו. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה  $b_n$  כך שנוצרת הסדרה:  $b_n^*$ . חשב את סכום הסדרה  $b_n^*$ .
- ז. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה  $b_n$  כך שנוצרת הסדרה:  $b_n^{**}$ . חשב את סכום הסדרה  $b_n^{**}$ .
- ח. מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה  $b_n$ . מסמנים את הסכום המתתקבל ב-  $S_b$  (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית  $b_n$  ב-  $S_{(s)}$ . הראה כי:  $S_b^2 \neq S_{(s)}^2$ .
- ט. הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה  $a_n$  וסכום איברי הסדרה  $b_n$  הוא  $\frac{2}{3}$ .

7) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכוםה 24. מאייברי הסדרה הנתונה  $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, \dots$ .

א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.

ב. ידוע שסכום כל אייברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 32.

ממצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

8) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת  $a_n$  ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים גדול פי  $\frac{2}{3}$  מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

מחברים כל שני אייברים סמוכים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה  $b_n$ .

ב. הוכח כי הסדרה  $b_n$  גם היא הנדסית יורדת וממצא את מנתה.

ג. הראה כי סכום הסדרה  $b_n$  שווה לסכום הסדרה  $a_n$ .

ד. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה  $a_n$ .

9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית  $(0 < q < 1)$ ,  $a_1, a_2, a_3, \dots$  שמנה היא  $q$ .  
נגידיר את הסכומים הבאים:  $T = a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10}, \dots, V = a_3 + a_7 + a_{11} + \dots$ .  
נתון כי:  $T = 6V$ .

א. מצא את מנת הסדרה  $q$ .

ב. פי כמה קטן  $V$  מסכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה?

ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים

במקומות הזוגיים הוא  $\frac{1}{3}1365$ .

10) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ .  
בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים בסדרה המקורי באופן הבא:  $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_{2n}^2$ .

א. הוכח כייחס בין סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.

בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכוםה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

ב. מצא את מנת הסדרה.

ג. מחברים את כל אייברי הסדרה החל מאיבר  $a_n$  כלשהו.

ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר  $a_n$ .

- 11)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית  $(q \neq 0, |q| < 1)$ ,  $a_1, a_2, a_3, \dots$  שמנתה היא  $q$
- . נגידיר את הסכומים הבאים :  $T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13}, \dots, V = a_2 + a_7 + a_{12} + \dots$
  - . נתון כי :  $V = 0.3T$ .
  - . א. מצא את מנת הסדרה  $q$ .
  - . מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות הא-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכוםה הוא 12.
  - . ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.
  - . ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעט.

**תשובות סופיות:**

.  $S = 18$  **(1)**

.  $a_1 = 24$  **(2)**

.  $q = \frac{4}{5}$ ,  $a_1 = 12\frac{1}{2}$  או  $q = \frac{1}{5}$ ,  $a_1 = 50$  **(3)**

.  $S = 18\frac{2}{3}$  **(4)**

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{\frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{q-1}}{\frac{a_n(q^n-1)}{q-1}} = \frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{a_n(q^n-1)} = q \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q^n-1} : b_n$$
**(5)** א. הסדרה  $c_n$   $\frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{a_n(q^n-1)}$  היא איננה הנדסית.

היות והיא תלולה ב-  $n$  היא איננה הנדסית.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^4 - a_n^2 q^2}{a_n^2 q^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^2 (q^2 - 1)}{a_n^2 (q^2 - 1)} = q^2$$
**הסדרה**  $c_n$   $\frac{a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2 - a_n^2}$  היא איננה הנדסית:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S + a_{n+1}}{S + a_n} = \frac{\frac{a_1}{1-q} + a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q} + a_n} = \frac{a_1 + (1-q)a_{n+1}}{a_1 + (1-q)a_n} = \frac{a_1(1 + (1-q)q^n)}{a_1(1 + (1-q)q^{n-1})} = \frac{q^n - q^{n+1} + 1}{q^{n-1} - q^n + 1} : d_n$$
**הסדרה**  $d_n$   $\frac{q^n - q^{n+1} + 1}{q^{n-1} - q^n + 1}$  היא איננה הנדסית.

$$\text{. } S_{(c_n)} = \frac{c_1}{1-q_c} = \frac{a_2^2 - a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1^2 (q^2 - 1)}{1-q^2} = -a_1^2$$
**ב.** היות והיא תלולה ב-  $n$  היא איננה הנדסית.

ג. מההשוויה:  $S_{(s)} = S^2$  מקבלים כי פתרון המשוואת הוא:  $q = 0, \pm 1$  colum נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה  $a_n$  היא שבר.עבור  $|q| > 1$  הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של  $q$  עבורו השוויון יתקיים. מש"ל.

$$\text{31.5. } a_1 = 56, q = \frac{1}{3} \quad \text{ב. } b_n = \frac{a_1}{1-q} q^{n-1} \quad \text{א. } \text{הוכחה.} \quad \text{ד. } \text{הוכחה.}$$
**(6)**

$$\text{7938. } \text{ח. } 63 \quad \text{ז. } 63 \quad \text{ט. } -63 \quad \text{נ. } 94.5$$

ט. **הסכום:**  $S^2$  מושמעו:  $(b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots)^2$ .הסכום:  $S_{(s)}$  מושמעו:  $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + \dots$ . ברור כי הביטויים אינם שווים.

$$\text{. } q = \frac{1}{3}, a_1 = 16 \quad \text{ב. } \text{הוכחה.} \quad \text{א. } \text{הוכחה.}$$
**(7)**

$$a_1 = 200 \quad \text{ט. } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{a_{2n-1} + a_{2n}} = q^2 \quad \text{א. } q = 0.6 \quad \text{א. } \text{הוכחה.}$$
**(8)**

$$\text{ג. } a_1 = 1024 \quad \text{ב. } \text{פ. 5} \quad \text{ט. } q = \frac{1}{2} \quad \text{א. } \text{הוכחה.}$$
**(9)**

$$\text{ג. } a_5 = 20 \quad \text{ב. } q = 0.5 \quad \text{ט. } \text{הוכחה.}$$
**(10)**

$$\text{ג. } S = 288 \quad \text{ב. } a_1 = -16 \quad \text{ט. } q = \frac{1}{3} \quad \text{א. } \text{הוכחה.}$$
**(11)**